Ejercicio 6 de la relación de problemas. Sea $V = \mathbb{R}^3$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y f un endomorfismo en V verificando:

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2$$
$$f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3$$
$$f(e_3) = 2e_2 + e_3$$

donde $B = \{e_1 = (0,1,0),\ e_2 = (-1,0,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$ es base de V. Se pide:

i) Calcular las matrices asociadas a f respecto de la base B y también en la base canónica.

ii) Estudiar si f es un automorfismo.

i) En este ejercicio, en lugar de conocer la expresión que define el endomorfismo, conocemos la imagen de tres vectores que forman una base B de V. Para calcular la matriz asociada a f respecto de la base B, necesitamos justamente la imagen de los vectores de B que nos da el enunciado.

De esta forma, la matriz asociada a f respecto de la base B, será aquella cuyas columnas son las coordenadas en B de dichas imágenes:

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 = (1, 2, 0)_B$$

$$f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3 = (2, -1, 2)_B$$

$$f(e_3) = 2e_2 + e_3 = (0, 2, 1)_B$$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz asociada a f respecto de la base canónica, a saber: B_c={(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} necesitamos calcular la imagen de cada uno de estos vectores:

Como $(1, 0, 0) = -e_2$, entonces $f(1, 0, 0) = f(-e_2) = -f(e_2) = -2e_1 + e_2 - 2e_3$

Teniendo en cuenta que $e_1 = (0,1,0)$, $e_2 = (-1,0,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$ entonces :

$$f(1, 0, 0) = -2e_1 + e_2 - 2e_3 = -2\,(0,1,0) + (-1,0,0) - 2\,(0,0,1) = (-1, -2, -2)$$

Como $(0, 1, 0) = e_1$, entonces $f(0, 1, 0) = f(e_1) = e_1 + 2e_2 = (0,1,0) + 2(-1,0,0) = (-2, 1, 0)$

Por último, como $(0, 0, 1) = e_3$, entonces $f(0, 0, 1) = f(e_3) = 2e_2 + e_3 = 2(-1,0,0) + (0, 0, 1) = (-2, 0, 1)$

La matriz asociada a f respecto de la base canónica será aquella cuyas columnas son las coordenadas respecto de la base B_c de los anteriores vectores, coordenadas que coinciden con las que ya tenemos pues la base es la canónica:

$$M_{Bc}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Para responder a esta pregunta sólo tenemos que calcular el rango de cualquiera de las matrices anteriores. Comencemos a calcular el determinante, por ejemplo de la primera que hemos obtenido:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 - 4 = -9 \neq 0, \quad \Rightarrow \quad \text{rango}(M_B(f)) = 3$$

Como la matriz asociada es cuadrada de rango máximo, podemos asegurar que f es biyectiva y por tanto un endomorfismo biyectivo es un automorfismo.